

структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 280 с.  
8. *Lifanov I.K.* Singular Integral Equations and Discrete Vortices. — Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996, — 475 p.

*Поступила в редколлегию 20.05.2013*

---

УДК 517.968: 519.6

**Моделирование дифракции волн на периодических системах лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя / В. Д. Душкин //** Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків: НТУ «ХП», 2013. — №37 (1010). — С. 51 — 58. Бібліогр.: 8 назв.

Побудовано математичну модель дифракції Е-поляризованих хвиль на періодичних системах імпедансних стрічок, розташованих на двох сторонах діелектричного шару. Система граничних інтегральних рівнянь задачі складається з інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. При побудові моделі було застосовано метод параметричних уявлень інтегральних операторів.

**Ключові слова:** імпедансні стрічки, сингулярні інтегральні рівняння, метод параметричних уявлень інтегральних операторів.

The mathematical model of E-polarized waves diffraction on periodic systems of impedance tapes, located on two sides of the dielectric layer had been built. The boundary integral equations system of the problem consists of Fredholm integral equations of the second kind and singular integral equations of the first kind. The method of integral operator's parametric representations had been used.

**Key words:** impedance tapes, singular integral equations, the method of parametric representations of integral operators.

УДК 519.688

**І.В. КАЧАНЕНКО**, магістрант КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ;  
**А.В. НЕТРЕБА**, канд. фіз.-мат. наук, доц., КНУ ім. Тараса Шевченка,  
Київ

## **РЕКОНСТРУКЦІЯ РЕНТГЕНІВСЬКИХ ТОМОГРАМ ДЛЯ НЕПОВНОГО НАБОРУ ПРОЕКЦІЙ**

Розглядається проблема визначення залежності зміни якості реконструкції рентгенівських томограм від зменшення кута повороту скануючої системи. Проведено реконструкцію рентгенівських томограм з кутом повороту скануючої системи від 90 до 180 градусів, для чого використано декілька методів. Виконано оцінку якості отриманих томограм в порівнянні з початковим об'єктом; визначено критичний кут повороту скануючої системи.

**Ключові слова:** реконструкція, алгоритм, сінограма, рентгенівська томографія, перетворення Фур'є, дискретні дані, переріз.

**Вступ та аналіз останніх досліджень.** Рентгенівська комп'ютерна томографія (КТ) — це методика пошарового рентгенологічного дослідження органів і тканин із застосуванням комп'ютерної обробки множинних рентгенів-

ських зображень, виконаних під різними кутами, з подальшою реконструкцією зображення і визначенням щільності будь-якої ділянки цих тканин.

Усі технології і методики візуалізації з використанням рентгенівських променів ґрунтуються на тому, що різні тканини ослаблюють інтенсивність рентгенівських променів при проходженні крізь них в неоднаковому ступені [1].

Але в КТ присутні певні математичні та фізичні проблеми *реконструктивної томографії*.

Як описано в джерелі [2] для отримання томографічних зображень, по яким ставиться медичний діагноз, необхідно обробити дані безпосередніх вимірів, що виконуються в межах методу реконструктивної обчислювальної томографії (РОТ). Наприклад, дані про поглинання рентгенівського випромінювання у випадку РОТ або дані про резонансні явища у випадку РОТ на ядерному магнітному резонансі. Процес такої обробки заснований на вирішенні наступної математичної проблеми: дані проведених вимірів пов'язані з шуканими розподілами, і цей зв'язок можна описати за допомогою відповідного інтегрального перетворення. Таким чином, для отримання реконструктивного зображення необхідна операція звернення інтегрального перетворення.

З математичної точки зору в проблемі відновлення функції можна виділити три основні аспекти. По-перше, необхідно знати, в якій мірі досліджуваний об'єкт описується наявними даними. По-друге, бажано знати, наскільки процес відновлення стійкий відносно похибок у вихідних даних. І нарешті, необхідно розробити сам алгоритм відновлення.

Зображення поперечних перерізів об'єкта можна точно реконструювати, якщо відомі його проекції (лінійні інтеграли) при усіх кутах. Ця фундаментальна властивість знайшла своє застосування в цілому ряді галузей, головним чином в медицині. Але в багатьох випадках результати реальних вимірів не дозволяють точно визначити повний набір лінійних інтегралів, що приводить до похибок і викривлень реконструктивного зображення [3, 4].

Результати вимірів можуть виявитися неточними по багатьом різним причинам, в тому числі і через наявність дії *шуму* і неповного набору даних [5, 6]. Наявність шуму призводить до неоднозначності результатів вимірів або ж проявляється у виді завади корисному сигналу. Зареєстрованих даних може виявитися недостатньо по цілому ряду причин, включаючи процес дискретизації і наявність областей, по яким дані не отримані.

Вирішення математичних задач томографії зводиться до вирішення операторних рівнянь 1-го роду. Відомо, що задачі обчислення таких рівнянь є некоректно поставленими. При знаходженні їх наближених відповідей необхідно використовувати *методи регуляризації*, які дозволяють враховувати додаткову інформацію про поставлену задачу. Різноманіття такої інформації породжує численні алгоритми розв'язання основних математичних задач обчислювальної діагностики [7, 8].

**Постановка задачі.** Однією із найважливіших проблем, які виникають на даному етапі розвитку комп'ютерної томографії, це є вибір оптимального алгоритму, критерієм підбору якого може слугувати, наприклад, якість зображення та машинний час обрахунку алгоритму [9].

Як описано у джерелі [10], важливою задачею розрахункової томографії є зменшення часу реконструкції структури об'єкту. В цій статті для отримання реконструкції пропонується використати перетворення Фур'є замість затратного по часу *методу оберненого проєціювання*.

Тому в даній статті була розглянута задача визначення залежності зміни якості реконструкції рентгенівських томограм від зменшення кута повороту скануючої системи декількома методами.

Для розв'язку задачі ми скористалися методами інтегральних перетворень, а саме алгоритмом реконструкції по дискретним даним та алгоритм з використанням перетворень Фур'є. Ці методи були застосовані тому, що вони призначені саме для реконструкції зображень по проєкціям для паралельних променів.

**Математична модель.** Алгоритм реконструкції томографічних зображень по дискретним даним заснований на принципі використання формули згортки, що дозволяє реконструювати зображення по лінійним інтегралам. Показано, що в результаті дискретизації цей спосіб приводить до алгоритму реконструкції по дискретним даним [10].

Для апроксимації функції  $f_B(k\Delta x, l\Delta y)$ , по проєкціям  $\tilde{p}(m\Delta s, \theta_n)$ , потрібен алгоритм, зручний для реалізації на ЕОМ. Простіше вирахувати інтеграл від оберненої проєкції за допомогою наступної формули трапеції:

$$f_B(k\Delta x, l\Delta y) \cong \Delta\theta \sum_{n=1}^N \tilde{p} \cdot (k\Delta \cos \theta_n + l\Delta \sin \theta_n, \theta_n) \quad (1)$$

Для кожного значення кута  $\theta_n$  необхідно знайти значення проєкції згортки  $\tilde{p}(s', \theta_n)$ . Для знаходження цих значень спочатку потрібно оцінити  $\tilde{p}(m\Delta s, \theta_n)$  при  $M^- \leq m \leq M^+$ , а тільки потім методом інтерполяції по цим оцінкам знайти потрібне  $M$  значення функції  $\tilde{p}$ . Таким чином, апроксимація згортки здійснюється за допомогою двох операцій над дискретними даними: дискретної згортки, результат якої позначимо через  $\tilde{p}_c$ , і наступної інтерполяції, результат якої позначимо через  $\tilde{p}_I$ . Ці операції можна записати у наступному вигляді:

$$\tilde{p}_c(m'\Delta s, \theta_n) = \Delta s \sum_{m=M^-}^{M^+} p(m\Delta s, \theta_n) q((m' - m)\Delta s), \quad M^- \leq m \leq M^+, \quad (2)$$

$$\tilde{p}_I(s', \theta_n) = \Delta s \sum_{m'} \tilde{p}_c(m'\Delta s, \theta_n) I(s' - m'\Delta s). \quad (3)$$

Де  $I(s)$  – інтерполюється, а число складових залежить від ширини інтервалу, на якому  $I(s)$  відмінна від нуля.

Оскільки, проводиться комп'ютерне моделювання конкретного випадку, то для алгоритму реконструкції по дискретним даним ми використовуємо вже відоме зображення, яке було отримане реальною томографічною установкою (рис. 1, а).

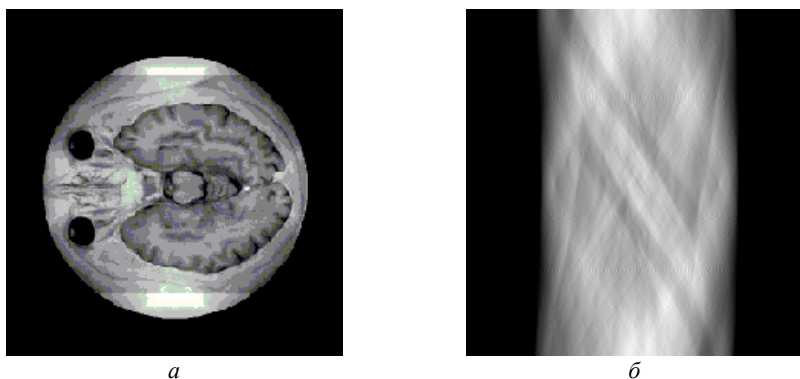


Рис. 1 – Томографічне зображення при куті повороту скануючої системи на 180 градусів: а – переіз головного мозку; б – сінограма перерізу головного мозку.

На рис. 1 зображено переріз головного мозку та побудована для нього сінограма з кутом повороту скануючої системи 180 градусів.

Як описано у науковому виданні [11], рішення математичних задач томографії зводиться до вирішення операторних рівнянь 1-го роду. Різноманітність такої інформації породжує численні алгоритми рішення основних математичних задач обчислювальної діагностики. І основною проблемою в такому випадку є вибір оптимального алгоритму. Тому, було розглянуто алгоритм з використанням перетворення Фур'є.

У томографії ставиться математична задача пошуку невідомої функції  $f(x, y)$ , якщо відома функція  $R(s, \varphi)$ , що є її образом в просторі Радона. Рішення поставленої задачі зводиться до пошуку прямого та зворотного перетворення Радона.

Існує співвідношення, що визначає зв'язок між перетворенням Фур'є цих функцій. Це так звана *теорема про центральний переріз*.

Нехай  $R(\omega, \varphi)$  – це одновимірне перетворення Фур'є функції  $R(s, \varphi)$  по змінній  $s$ , а  $F(u, v)$  – це двовимірне перетворення Фур'є функції  $f(x, y)$  по змінним  $x$  і  $y$ .

З урахуванням введених позначень математична формулювання теореми про центральному перерізі має вигляд:

$$S(\omega, \varphi) = F(u, v). \quad (4)$$

Завдання відновлення зображення базується на теоремі про центральний переріз. Функцію  $f(x, y)$  можна знайти за двовимірним перетворенням Фур'є:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy. \quad (5)$$

Перейдемо в площині  $(u, v)$  до полярних координат  $\omega, \varphi$ :  $u = \omega \cos \varphi$ ,  $v = \omega \sin \varphi$ . Тоді рівняння (5) буде мати вигляд:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega F(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i2\pi(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega d\varphi, \quad (6)$$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega R(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i2\pi(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega d\varphi. \quad (7)$$

Рівність (4) є шуканою формулою звернення, що дозволяє знайти функцію  $f(x, y)$ . Однак дана форма запису рівності внаслідок використаної в ньому області інтегрування виявляється не дуже зручною для обробки томограм. Зручніше розбити інтеграл на дві частини, вважаючи, що  $\varphi$  змінюється від 0 до  $\pi$  і від  $\pi$  до  $2\pi$ , оскільки тоді можна використовувати таку властивість:

$$F(\omega, \varphi + \pi) = F(\omega, \varphi). \quad (8)$$

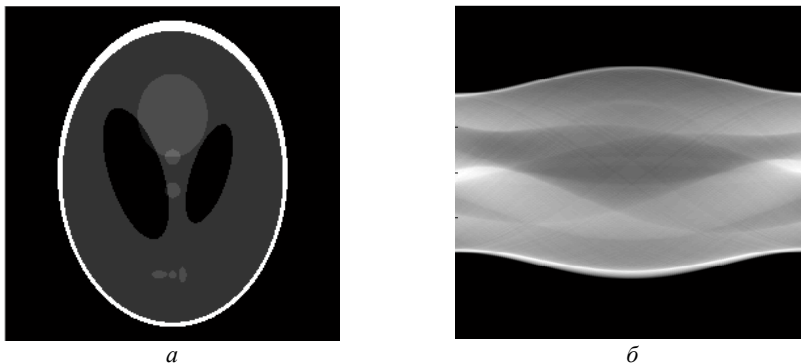


Рис. 2 – Фантом томографічного зображення при куті повороту скануючої системи 180 градусів: *a* – фантом; *б* – сінограма фантому.

Алгоритм фонові проекції відносно простий для паралельної схеми сканування, тому ми обрали саме його для проведення дослідження.

Оскільки ми проводимо комп'ютерне моделювання конкретного випадку, то для алгоритму реконструкції за допомогою перетворень Фур'є ми використовуємо фантом томографічного зображення (рис. 2, *a*) [12].

Ми обрали фантом тому що:

1) фантом містить типові елементи, які по різному реконструюються, оскільки не всі готові перерізи мають всі особливості, що можуть існувати у такого типу зображень;

2) готові перерізи – це реконструйовані дані, і це означає, що в них вже є похибка, внесена деяким алгоритмом;

3) даний фантом – стандартний для тестувань алгоритмів реконструкції, його часто можна зустріти в літературі, присвяченій таким алгоритмам.

На рис. 2 зображено фантом перерізу головного мозку і побудована для нього сінограма.

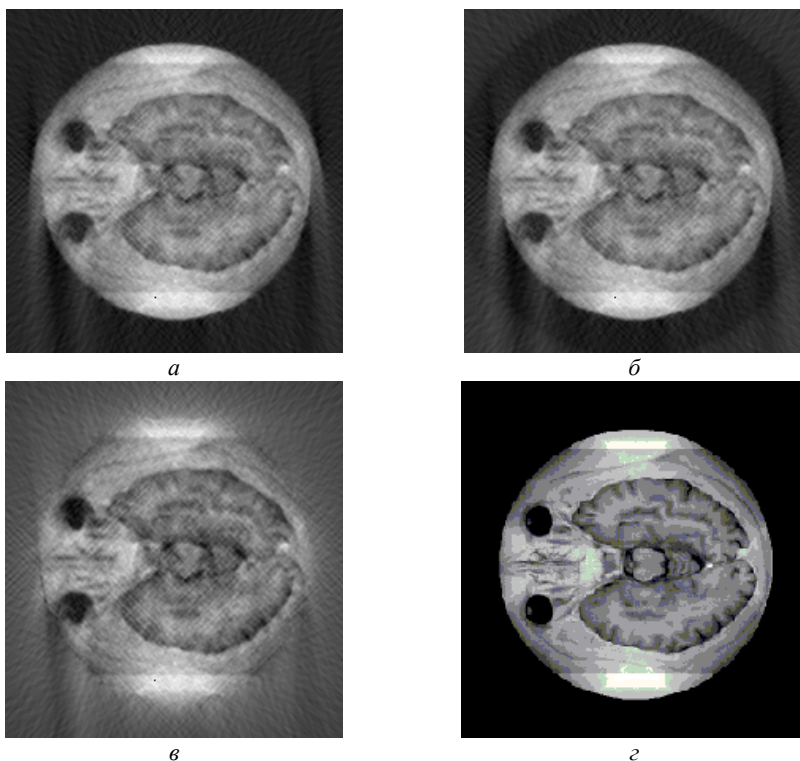


Рис. 3 – Зображення реконструкції перерізу головного мозку, отримані за допомогою алгоритму реконструкції по дискретним даним: *а* – кут повтору скануючої системи на 180 градусів; *б* – на 130 градусів; *в* – на 100 градусів; *г* – оригінал.

**Результати моделювання.** В ході моделювання було досліджено залежність зміни якості томографічного зображення від зменшення кута повороту скануючої системи починаючи від 180 градусів до 90 (отримані томографічні зображення з кутами повороту скануючої системи, меншими за 90, градусів були неінформативними, тому не були включені в подальший хід дослідження).

На рис. 3 наведені результати реконструкції томографічного зображення, які були отримані за допомогою програмного інтерфейсу, використовуючи алгоритм реконструкції за дискретними даними. Кут повороту скануючої системи зменшували від 180 до 90 градусів. Для прикладу наведені результати зображень з іншим кутом, а також зображення-оригінал.

Порівнявши отримані результати з оригіналом, навіть візуально, ми бачимо, що на зображеннях з'являються шуми, причому зі зменшенням кута

повороту шумів стає все більше та зображення втрачає інформативність.

Таблиця 1 – Значення коефіцієнта кореляції для реконструкції томографічних зображень перерізу головного мозку

Кут	Коефіцієнт	Кут	Коефіцієнт
180	0,85698	120	0,84592
170	0,85696	110	0,83242
160	0,85676	108	0,82768
150	0,85624	106	0,81997
140	0,85506	104	0,78869
130	0,85247	100	0,73904

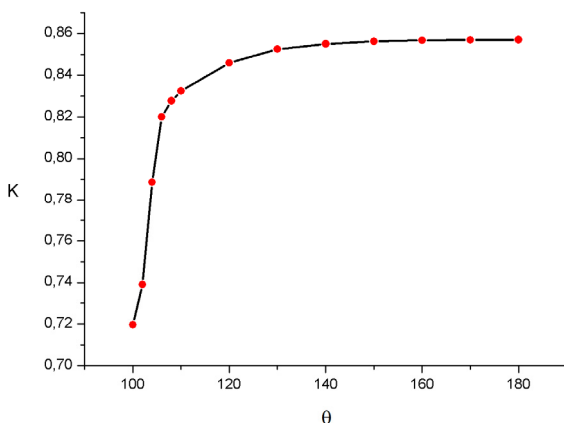


Рис. 4 – Залежність коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи для результатів реконструкції за дискретними даними.

Для визначення якості зображення за допомогою програмного інтерфейсу [13], було пораховано значення коефіцієнта кореляції томограм та початкового об'єкту, тобто оригіналу.

Порахувавши значення коефіцієнтів кореляції (табл. 1) для результатів, які були отримані з використанням алгоритму реконструкції за дискретними даними, було побудовано графіки залежності зміни коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи (рис. 4).

На рис. 5 наведені результати реконструкції фантому томографічного зображення, які були отримані за допомогою програмного інтерфейсу, що використовує алгоритм з перетвореннями Фур'є. Кут повороту скануючої системи, як і в попередньому алгоритмі, зменшували від 180 до 90 градусів.

Наведені результати зображень з різним кутом повороту скануючої системи та оригінал.

Візуально видно, що при застосуванні даного алгоритму якість отриманого зображення значно краща. Шумів на зображенні набагато менше

та при малих кутах зображення залишається інформативним, якщо порівнювати зображення при відповідних кутах з поперенього випадку, тобто при застосуванні алгоритму за дискретними даними.

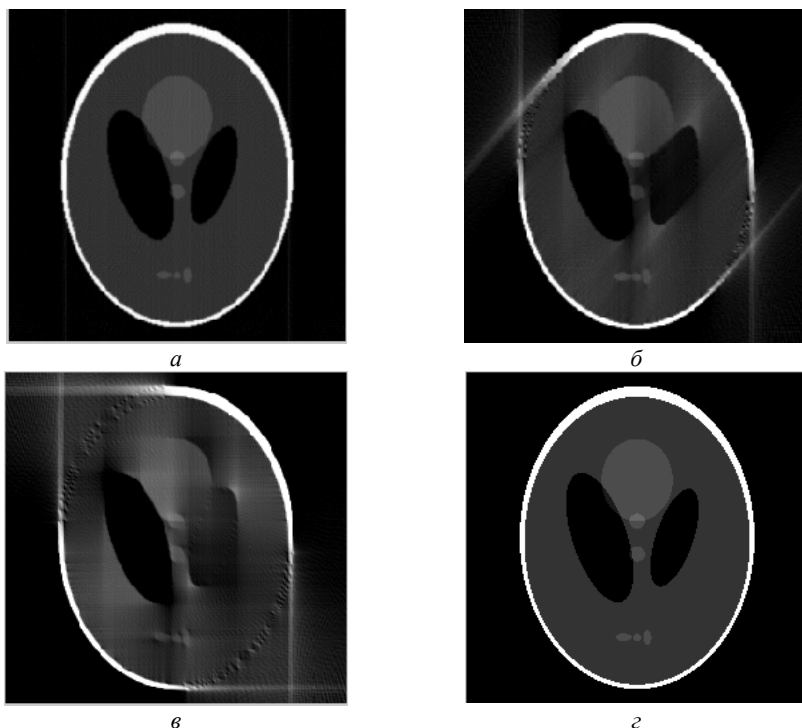


Рис. 5 – Зображення реконструкції фантому перерізу головного мозку, отримані за допомогою алгоритму з використанням перетворень Фур'є: *а* – кут повтору скануючої системи на 180 градусів; *б* – на 130 градусів; *в* – на 100 градусів; *г* – оригінал.

Аналогічним способом було пораховано коефіцієнт кореляції для отриманих результатів (табл. 2) та побудовано графік залежності зміни коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи (рис. 6).

Таблиця 2 – Значення коефіцієнта кореляції для реконструкції фантому то графічного зображення перерізу головного мозку

Кут	Коефіцієнт	Кут	Коефіцієнт
180	0,89773	120	0,88692
170	0,89767	110	0,87542
160	0,89754	108	0,86865
150	0,89744	106	0,85282
140	0,89646	104	0,84889
130	0,89567	100	0,83724



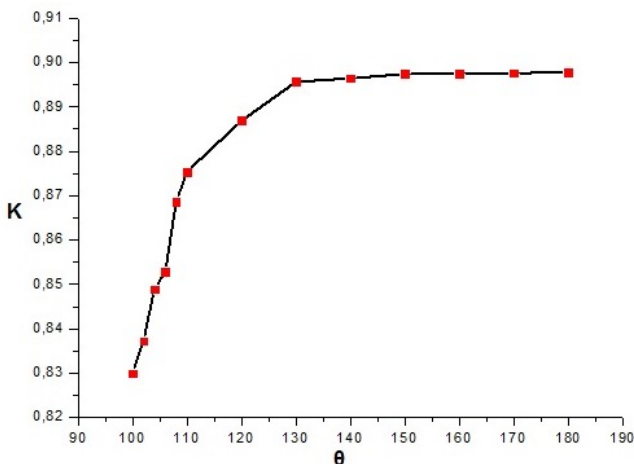


Рис. 6 – Залежність коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи для результатів реконструкції з використанням перетворень Фур'є.

З наведених графіків ми бачимо, що в межах кута 130 – 180 градусів коефіцієнт кореляції майже не змінюється. Вже від 100 до 130 градусів крива починає різко спадати, що показує зменшення коефіцієнта кореляції. Для зображень реконструкції томографічного зображення перерізу головного мозку коефіцієнт кореляції має дещо менше значення ніж значення коефіцієнта для зображення реконструкцій фантому. Це свідчить про те, що алгоритм реконструкції з використанням перетворень Фур'є дає кращі результати в порівнянні з алгоритмом реконструкції по дискретним даним. В обох випадках коефіцієнт кореляції суттєво менший з кутом повороту скануючої системи на 100 градусів в порівнянні зі значенням на 180 градусів. Такий результат вказує на те, що якість картинки значно погіршується зі зменшення кута повороту. Як бачимо, з кутом повороту скануючої системи на 130 градусів, зображення ще залишається інформативним, але зі зменшення цього кута якість зображення різко зменшується. Тому кут повороту скануючої системи, що становить 130 градусів, є критичним.

**Висновки.** При виконанні роботи були досліджені характеристики реконструкції томографічних зображень за умов використання двох різних методів.

Показано, що для обох методів реконструкція томографічних зображень задовільної якості можлива при проведенні вимірів в межах кута від 130 до 180 градусів.

Якість томографічного зображення була оцінена чисельно за допомогою обрахунку коефіцієнта кореляції томограм та початкового значення.

Порівнявши обидва методи, видно, що якість реконструйованого зображення значно краща при використанні алгоритму з перетвореннями Фур'є. Також час обрахунку, тобто витрата машинного часу, значно різняться. Роз-

рахунок часу отримання однієї реконструкції за допомогою алгоритму з використанням інтегральних перетворень займає близько 3 хвилин. За тих самих умов розрахунок часу за допомогою алгоритму з використанням перетворень Фур'є – декілька секунд. Таким чином другий метод є економнішим та ефективнішим.

**Список літератури:** 1. *Steve Webb* The Physics of Medical Imaging/Joint Department of Physics, Institute of Cancer Research and Royal Marsden Hospital, Sutton, Surrey, 1991. 2. *Alfred K. Louis and Frank Natterer* Mathematical Problems of Computerized Tomography / t.71, №3, march 1983. 3. *Jing Wang; Tianfang Li; Hongbing Lu; Zhengrong Liang*, Dept. of Radiol. & Dept. of Phys. & Astron., State Univ. of New York, Stony Brook, NY Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose X-ray computed tomography / Medical Imaging, IEEE Transactions on ,Oct. 2006. 4. *Albert Macovski*, member IEEE Physical Problems of Computerized Tomography / t.71, №3, march 1983. 5. *Jing Wang; Tianfang Li; Hongbing Lu; Zhengrong Liang*, Dept. of Radiol. & Dept. of Phys. & Astron., State Univ. of New York, Stony Brook, NY Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose X-ray computed tomography / Medical Imaging, IEEE Transactions on ,Oct. 2006. 6. *Adam Wang* Localized Noise Power Spectrum Analysis / PSYCH 221: Applied Vision and Image Engineering class project , March 2008. 7. *Yair Censor* Finite Series-Expansion Reconstruction Methods / ТИИЭР, t.71, №3, март 1983 . 8. *Robert M. Lewitt*, member IEEE Reconstruction Algorithms: Transform Methods/ t.71, №3, march 1983. 9. *Samuel G. Armato, III, Michael B. Altman, and Patrick J. La Riviere* Automated detection of lung nodules in CT scans: Effect of image reconstruction algorithm / Department of Radiology, The University of Chicago, South Maryland Avenue, Chicago, February 2003. 10. *Э.Е. Либин, С. В. Чахлов* «Преобразование синограмм» научная редакция «Математика» май 2005 УДК 519.67; 620.179.15.05. 11. *М.Я. Марусина, А.О. Казначеева* «Современные виды томографии» Санкт-Петербург 2006 ст. 8-38. 12. *M. Guerquin-Kern, F. I. Karahanoglu, D. Van De Ville, K. P. Pruessmann and M. Unser* Analytical form of Sepp-Logan phantom for parallel MRI 978-1-4244-4126-6/10/2010 IEEE. 13. *Xiaolong Ouyang; Wong, W.H.; Johnson, V.E.; Xiaoping Hu; Chin-Tu Chen*, Dept. of Radiol., California Univ., San Francisco, CA Incorporation of correlated structural images in image reconstruction / Medical Imaging, IEEE Transactions on, Dec 1994

Надійшла до редколегії 20.05.2013

---

УДК 519.688

**Реконструкція рентгенівських томограм для неповного набору проєкцій / І. В. Качаненко, А. В. Нетребя** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 58 – 67. Бібліогр.: 13 назв.

Рассматривается проблема определения зависимости изменения качества реконструкции рентгеновских томограмм от изменения угла поворота сканирующей системы. Проведена реконструкция рентгеновских томограмм с углом поворота сканирующей системы от 90 до 180 градусов, для чего используется несколько методов. Проведена оценка качества полученных томограмм в сравнении с начальным объектом; определён критический угол поворота сканирующей системы.

**Ключевые слова:** реконструкция, алгоритм, синограмма, рентгеновская томография, преобразования Фурье, дискретные данные, сечение.

The article deals with the determination of the quality change of the reconstruction of x-ray tomograms depending on reduction angle scanning system. X-ray tomograms were reconstructed with angle scanning system from 90 to 180 degrees. Reconstruction was carried out by several methods. It were evaluated the quality received tomograms and the initial object. According to the results identified critical angle scanning system.

**Key words:** reconstruction, algorithm, sinogram, x-ray tomography, Fourier transform, discrete data, cross-section.